

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΣΑΒΒΑΤΟ 27 ΜΑΪΟΥ 2006  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

**A.1** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $\Delta$ .

Να αποδείξετε ότι:

- Αν  $f'(x) > 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το  $\Delta$ .
- Αν  $f'(x) < 0$  σε κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το  $\Delta$ .

**Μονάδες 10**

**A.2** Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο  $\Delta$ ;

**Μονάδες 5**

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z$  ισχύει  $|z|^2 = z^2$ .

**Μονάδες 2**

**β.** Αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .

**Μονάδες 2**

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- γ. Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.

**Μονάδες 2**

- δ. Ισχύει ο τύπος  $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 2**

- ε. Ισχύει η σχέση

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx, \text{ όπου } f', g'$$

είναι συνεχείς συναρτήσεις στο  $[\alpha, \beta]$ .

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = 2 + (x-2)^2$  με  $x \geq 2$ .

- α. Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι 1-1.

**Μονάδες 6**

- β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  της  $f$  και να βρείτε τον τύπο της.

**Μονάδες 8**

- γ. i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  με την ευθεία  $y=x$ .

**Μονάδες 4**

- ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2, z_3$  με  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$   
και  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι:

**i.**  $|z_1 - z_2| = |z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$ .

**Μονάδες 9**

**ii.**  $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$  και  $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \geq -1$ .

**Μονάδες 8**

**β.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των  $z_1, z_2, z_3$  στο μιγαδικό επίπεδο, καθώς και το είδος του τριγώνου που αυτές σχηματίζουν.

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$ .

**α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 8**

**β.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

**Μονάδες 5**

**γ.** Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g(x) = \ln x$  στο σημείο  $A(\alpha, \ln \alpha)$  με  $\alpha > 0$  και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $h(x) = e^x$  στο σημείο  $B(\beta, e^\beta)$  με  $\beta \in \mathbb{R}$  ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός  $\alpha$  είναι ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .

**Μονάδες 9**

**δ.** Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $g$  και  $h$  έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.

**Μονάδες 3**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορείτε να τα σχεδιάσετε και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.30' πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**